Stray • Ubøe

Lineær algebra og diskret matematikk

Fasit

nki Forlaget

1. utgave 1. opplag 1998
1. utgave 2. opplag 2005

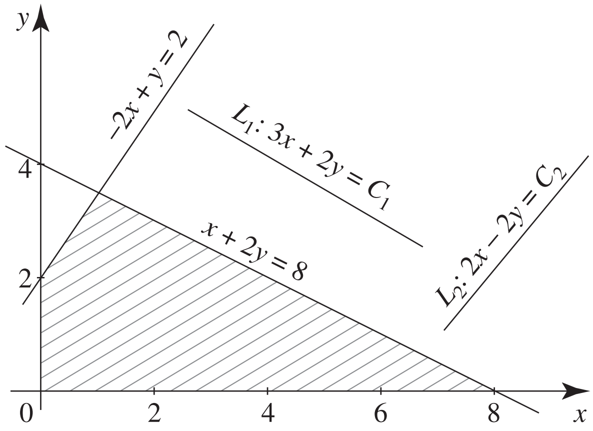
Utgiver: NKI Forlaget, Hans Burums vei 30, 1357 Bekkestua
Postboks 111, 1319 Bekkestua
Tlf.: sentralbord 67 58 88 00
ordrekontor 67 58 89 00
Telefaks: 67 58 19 02
E-postadresse: nkiforlaget@nki.no
Internett-adresse: www.nkiforlaget.no

Illustrasjoner: PrePress as/Vegard Brekke
Sats: Trond Eidnes og PrePress as

ISBN 82-562-4275-2

Kapittel 1

1 a)



b) $(3x + 2y)_{\text{maks}} = 24$ i punktet $(8, 0)$

$(2x - 2y)_{\text{min}} = -\dfrac{28}{5}$ i punktet $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{18}{5}\right)$

2 a) Regn ut matriseproduktene $\boldsymbol{AI}$ og $\boldsymbol{IA}$.

b) $\boldsymbol{ML}_2 = \boldsymbol{I}$ og $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$ gir likningen

(1) $$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{ML}_2 = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{I} = \boldsymbol{L}_1$$

Men i den siste likningen er $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$, så vi får

(2) $$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{ML}_2 = \boldsymbol{I}\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_2$$

Likningene 1 og 2 viser at $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2$.

3 a) Vis ved utregning (se oppgave 2b) at

$$\boldsymbol{LM} = \boldsymbol{I} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{ML} = \boldsymbol{I}$$

b) $\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

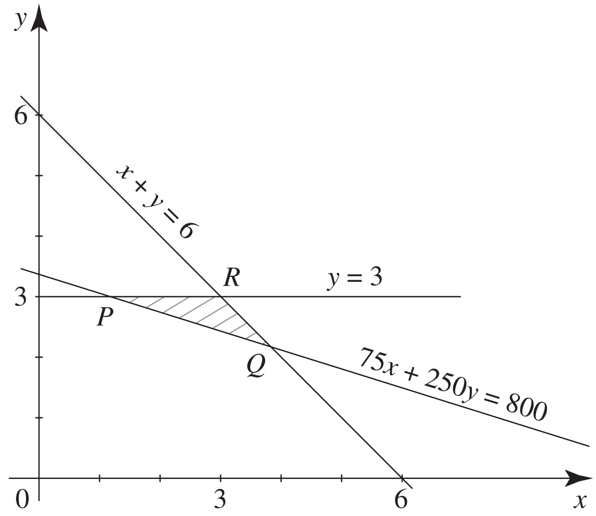
4 a) Regn ut

- determinantene $|\boldsymbol{A}|$ og $|\boldsymbol{B}|$ hver for seg (bruk definisjonen i oppgave 3a)
- produktet $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$
- matriseproduket $\boldsymbol{AB}$
- determinanten $|\boldsymbol{AB}|$

Sammenlikn $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$ med $|\boldsymbol{AB}|$.

b) Vi har $|\boldsymbol{M}| \cdot |\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{ML}|$ etter oppgave a. Videre er $|\boldsymbol{ML}| = |\boldsymbol{I}| = 1$. Altså blir $|\boldsymbol{M}| \cdot |\boldsymbol{L}| = 1$, og da kan ikke $|\boldsymbol{M}| = 0$. (Selvsagt kan heller ikke $|\boldsymbol{L}| = 0$.)

5 Vis først at hjelpeorganisasjonen får lavest kostnader i et av de tre punktene $P\left(\dfrac{2}{3}, 3\right)$, $Q(4, 2)$ eller $R(3, 3)$, se figuren:



Ved å sette inn i uttrykket $50\,000x + 200\,000y$ finner vi at $x = 4$ og $y = 2$ gir de laveste kostnadene.

6 $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

7 $|\boldsymbol{M}| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$

$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

8 a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ -10 & 1{,}4 \end{bmatrix}$

b) 372 gauper og 1920 harer

9 $\boldsymbol{M_k} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{bmatrix}$

der $\varphi_k = \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \cdot k$ og $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Kapittel 2

1 Ettersom $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}$, følger at

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

fordi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = \boldsymbol{a}$ og $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \boldsymbol{b}$ når firkanten $PQRS$ er et parallellogram.

2 Dersom båtens lengderetning står vinkelrett på elvestrømmen, blir den totale hastigheten

$$v = \sqrt{25 + 9} \approx 5{,}8 \text{ (m/s)}$$

Skal båten krysse elva uten å drive nedover, vil overfarten ta 25 s.

3 La A være midtpunktet på RQ og B midtpunktet på PR i trekanten PQR. La S være skjæringspunktet mellom QB og PA, og sett $\overrightarrow{PS} = t\,\overrightarrow{PA}$ og $\overrightarrow{QS} = u\,\overrightarrow{QB}$. Da må

$$t\left(\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\right)\right) = \overrightarrow{PQ} + u\left(\overrightarrow{QP} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{PR}\right)$$

Det gir

$$\frac{1}{2}\,(t - u)\,\overrightarrow{PR} = \left(1 - u - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{PQ}$$

Det er mulig bare når $u = t = 2/3$.

4 Lengdene av $\boldsymbol{a}$ i de fire eksemplene er $\sqrt{5}$, 5, $\sqrt{11}$ og $3\sqrt{3}$.

5 Avstanden blir $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

6 Vi skal ha $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|^2 = 4$, altså

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 4$$

7 Avstanden minker med ca. 22 km/h.

8 Vinkelen blir $\theta = 120°$, fordi $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$.

9 Ettersom $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}$ og $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{50}$, får vi

$$\text{proj}_{\boldsymbol{b}}\,(\boldsymbol{a}) = \frac{4}{50}\,[3,\ -4,\ 5]$$

$$\text{proj}_{\boldsymbol{a}}\,(\boldsymbol{b}) = \frac{4}{3}\,[1,\ 1,\ 1]$$

10 Vinkelen θ oppfyller likningen

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Det gir

$$\theta \approx 0{,}62 \text{ rad} \quad (\theta \approx 35{,}3°)$$

11 La $\boldsymbol{a}_1 = \text{proj}_{\boldsymbol{b}}\,(\boldsymbol{a}) = \dfrac{13}{38}\,\boldsymbol{b}$, og vi får

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_1 = [2,\ 1,\ 1] - \frac{13}{38}\,[3,\ 2,\ 5] = \frac{1}{38}\,[37,\ 12,\ -27]$$

12 Likningen blir

$$2x + 4y + 3z = 29$$

Planet skjærer koordinataksene i

$$\left(\frac{29}{2},\ 0,\ 0\right), \quad \left(0,\ \frac{29}{4},\ 0\right), \quad \left(0,\ 0,\ \frac{29}{3}\right)$$

13 Likningen blir $x = 1$.

14 Vi kan aldri få $a + a^2 + 1 = 0$.

15 Vinkelen α mellom normalene til planene oppfyller likningen

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{42}}$$

som gir $\alpha \approx 108°$. Det gir $\theta \approx 72°$.

16 a) $x = 3 + 4t,\ \ y = 5,\ \ z = 3t$

b) $x = 4 - t,\ \ y = 9 - 3t,\ \ z = 1 + 6t$

c) $x = 2 + 3t,\ \ y = 1 - t,\ \ z = 4$

17 a) $x = 4 - 2t,\ \ y = 3 - 3t,\ \ z = t$

b) $x = 3 - 2t,\ \ y = t,\ \ z = t$

c) $x = 12 + \dfrac{35t}{2},\ \ y = t,\ \ z = -2 - \dfrac{7t}{2}$

18 En parameterframstilling blir

$$x = 7 + t,\ \ y = 3 + 3t,\ \ z = 4 + 5t$$

Skjæringspunktet svarer til parameterverdien

$$t = -\frac{9}{7}$$

19 L_1 og L_2 har ikke noe felles punkt.

20 a) $\text{proj}_{\mathcal{P}}\,(\boldsymbol{a}) = [3,\ 4,\ 0] - \dfrac{7}{3}\,[1,\ 1,\ 1]$

b) $\text{proj}_{\mathcal{P}}\,(\boldsymbol{a}) = [1,\ 1,\ 2] - \dfrac{4}{9}\,[1,\ -1,\ 4]$

21 Avstanden blir 8.

22 Avstanden fra origo til planet blir $d = 4$.

23 Bruk setningene 2–6 på planet, gitt ved

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

og et punkt (x_1, y_1, z_1) som oppfyller likningen

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D_1 = 0$$

24 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -6\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$

25 Arealet blir $\dfrac{\sqrt{46}}{2}$.

26 Likningen blir $6x - 2y + 4z = 20$.

27 Avstanden blir $\dfrac{3}{\sqrt{299}}$.

28 Vis f.eks. på en figur at $\boldsymbol{v}_2$ og $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ må ha samme lengde og samme retning.

29

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = -2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = 0 \times \boldsymbol{b} = 0$$

Kapittel 3

1

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^\top = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^\top = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}^\top = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{AB})^\top = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AC} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{B}^\top)\boldsymbol{A}^\top = (\boldsymbol{ABC})^\top = \begin{bmatrix} -32 & -8 \\ -7 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{RT} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 28 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{TR} = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 7 \\ -5 & -1 & -5 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{RS} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{TS} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{R}^\top = (\boldsymbol{RS})^\top = [4, 2, 9]$$

3 $(\boldsymbol{C})_{ij} = r_i \cdot s_j, \qquad 1 \le i \le 3, \quad 1 \le j \le 3$

4 Dersom $(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AA}^\top$, gir oppgave 3 at

$$(\boldsymbol{C})_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j$$

slik at $(\boldsymbol{C})_{ij} = 1$ for $i = j$, mens $(\boldsymbol{C})_{ij} = 0$ for $i \neq j$. Altså er

$$\boldsymbol{C} = [c_{ij}] = \boldsymbol{I}$$

5 Ifølge oppgave 4 har vi

$$\boldsymbol{AA}^\top = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 Ettersom

$$\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top\right)^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{A}^{\top\top} = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top$$

er $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top$ symmetrisk. Derimot er $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\top$ skeiv-symmetrisk fordi

$$\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\top\right)^\top = \boldsymbol{A}^\top - \boldsymbol{A}^{\top\top} = \boldsymbol{A}^\top - \boldsymbol{A} = -\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\top\right)$$

7 $\boldsymbol{M} = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^\top\right) + \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}^\top\right)$

8 a) Ut fra opplysningene i oppgaveteksten har vi

$$L_{n+1} = \frac{9}{10} L_n + \frac{2}{10} U_n$$

og

$$U_{n+1} = \frac{1}{10} L_n + \frac{8}{10} U_n$$

b) $\begin{bmatrix} L_2 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 45 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} L_3 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58{,}5 \\ 41{,}5 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} L_4 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60{,}95 \\ 39{,}05 \end{bmatrix}$

c) $x = \dfrac{200}{3}, \quad y = \dfrac{100}{3}$

d) Det ser ut til at

$$\begin{bmatrix} L_n \\ U_n \end{bmatrix} \to \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

når $n \to \infty$.

e) Siden

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{bmatrix}$$

og

$$(x_1 - x) + (y_1 - y) = 0$$

får vi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{7}{10} \begin{bmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ved induksjon finner vi at

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

der $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ er som i punkt c.

9 $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

10 $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

11 $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

12 a) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

gir rektanglet med hjørner i

$$(0, 0), \ (c, 0), \ (c, 1), \ (0, 1)$$

b) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

gir speilbildet av rektanglet i a om linja $y = x$.

c) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

gir rektanglet med hjørner i

$$(0, 0), \ (1, 0), \ (1, 1), \ (0, 1)$$

d) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

gir parallellogrammet med hjørner i

$$(0, 0), \ (1, 0), \ (1 + c, \ 1), \ (c, 1)$$

e) $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$

gir parallellogrammet med hjørner i

$$(0, 0), \ (1, c), \ (1, \ 1 + c), \ (0, 1)$$

13 $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

for enhver vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$.

14 Vi har

$$\begin{aligned} S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= T_{\boldsymbol{M}} T_{\boldsymbol{L}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= T_{\boldsymbol{M}} \left(\boldsymbol{L} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \boldsymbol{M} \left(\boldsymbol{L} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \boldsymbol{ML} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Etter dette blir $S = T_{\boldsymbol{B}}$, der $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{ML}$.

15 Vi finner

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

og dermed

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Kapittel 4

1 Likningene a og e er lineære.
De andre er ikke lineære.

2 $x_1 = 1, \quad x_2 = -3$

3 $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$

4 $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$

5 $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$

6 $x_1 = -3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4$

7 $x_1 = 1, \quad x_2 = -2$

8 $x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$

9 $x_1 = -3 - t, \quad x_2 = 2 + 2t, \quad x_3 = t$
der t er en fritt valgt parameter.

10 Systemet har ingen løsning.

11 $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$
Både x_1 og x_2 er ledende ukjente.

12 x_1 og x_2 er ledende ukjente. Systemet har en frihetsgrad siden vi kan velge $x_3 = t$, der t er en fritt valgt parameter. Det gir

$$x_1 = -2 + 5t, \quad x_2 = 1 - 3t$$

13 Systemet har ingen løsning.

14 De ledende variablene er x_1, x_2 og x_3. Setter vi $x_4 = t$ og $x_5 = s$, får vi

$$x_1 = -2 + 3t - s, \quad x_2 = -2 + t + s, \quad x_3 = 2 - 2t - s$$

Systemet har to frihetsgrader.

15 De ledende variablene er x_1 og x_3. Setter vi $x_2 = t$ og $x_4 = s$, får vi

$$x_1 = 11 - 2t + s, \quad x_3 = 3 + s$$

Systemet har to frihetsgrader.

16 a) entydig løsning for $k \neq \pm 2$

b) ingen løsning for $k = 2$

c) uendelig mange løsninger for $k = -2$

17 $5a - 2b - c = 0$

18 Vektorlikningen svarer til et homogent 2×3-system og har derfor uendelig mange løsninger etter setning 4–4.

19 a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Kapittel 5

1 a) 6 c) -10 e) 100

b) 3 d) 21 f) -20

2 a) Volumet av pyramiden blir en seksdel av volumet av parallellepipedet som er utspent av $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ og $\boldsymbol{r}_3$.

b) $V = \dfrac{1}{3}$

3 a) $\det(\boldsymbol{A}) = 15$ c) $\det(\boldsymbol{A}) = -54$

b) $\det(\boldsymbol{A}) = -4$ d) $\det(\boldsymbol{A}) = 60$

4

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 \left(\frac{b_2}{b_1} - \frac{a_2}{a_1} \right) = 0$$

5 Ettersom

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

følger det av oppgave 4 at $\overrightarrow{P_1 P_2}$ og $\overrightarrow{P_1 P_3}$ er parallelle hvis og bare hvis

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6 Resultatet følger direkte av oppgave 5.

7 a) $|\boldsymbol{A}| = 171$ b) $|\boldsymbol{A}| = -3$

8 a) $|\boldsymbol{A}| = -12$ b) $|\boldsymbol{A}| = 6$

9 Likningssystemet har en entydig løsning når

$$t \notin \{-4, -2, 2\}$$

Kapittel 6

1
$$2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

der $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{14}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 5$.

2 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 6 + 1 - 7 = 0$, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{6}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{63}$ og $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{69}$ fordi

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

3 a) Dersom

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 7 & -3 & 19 \end{bmatrix}$$

er $|\boldsymbol{A}| = 0$. Bruk nå setning 6—18.

b) løsning bare for $t = 1$

c) $\dim(V) = 2$.
$\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ er en basis fordi $\boldsymbol{r}_1$ og $\boldsymbol{r}_2$ er lineært uavhengige og $\dim(V) = 2$.

4 a) $\dim(V) = 2$.
Systemet har løsningen

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -8t_1 - 2t_2 \\ 5t_1 + t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

som gir basisen

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Vi kan gjøre om koeffisientmatrisen til

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ved hjelp av gausseliminering. De to første søylene i koeffisientmatrisen blir derfor en basis for søylerommet.

5 $t \neq 2$

6 Definer matrisen $\boldsymbol{A}$ slik:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ettersom $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, er radene $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ og $\boldsymbol{u}_2$ i $\boldsymbol{A}$ lineært uavhengige. Det har som konsekvens at $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ og $\boldsymbol{v}_3$ er lineært uavhengige, og at $\boldsymbol{u}_2 \notin \text{Lin}\,\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$. Dersom vi erstatter nederste rad i $\boldsymbol{A}$ med $\boldsymbol{u}_1$, blir determinanten lik null. Det vil si at $\boldsymbol{u}_1 \notin \text{Lin}\,\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$. (Oppgaven kan også løses ved gausseliminering.)

7 W_1, W_2 og W_3 er underrom. W_4 er ikke et underrom fordi $[1, 0, 1]$ og $[1, 1, 0]$ ligger i W_4, men

$$[1, 0, 1] + [1, 1, 0] = [2, 1, 1] \notin W_4$$

8 W blir den linja gjennom origo som er parallell med $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

9 $\boldsymbol{c} \in \text{Lin}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;\Leftrightarrow\; c_1 - 2c_2 + c_3 = 0$

10 a) En basis er

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

som vi finner ved å gjøre om $\boldsymbol{A}$ til

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ved hjelp av elementære radoperasjoner.

b) Vektorene $[1, 1, 3, 1]$ og $[0, 1, 1, -2]$ utgjør en basis for radrommet, mens

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en basis for søylerommet.
$\text{rang}\,(\boldsymbol{A}) = \text{Null}\,(\boldsymbol{A}) = 2$.

11 Vi må ha

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \text{Lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

og det er likeverdig med

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 1 & b_2 \\ 1 & 2 & b_3 \end{vmatrix} = 3b_1 - b_2 - b_3 = 0$$

(Vi kan løse hele oppgaven ved hjelp av gausseliminering.)

12 W er den linja gjennom origo som er parallell med $\boldsymbol{a}$. Vektoren $\boldsymbol{a}$ utgjør en basis.

13 W er det planet gjennom origo som inneholder $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$. En basis er $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$.

14 $W = \mathbb{R}^3$

15 $W = \text{Lin}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ fordi $\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$

16 $W = \mathbb{R}^3$

17 $W = \mathbb{R}^3$

18 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

19 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

20 $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

21 Vektorene står parvis vinkelrett på hverandre fordi skalarproduktet mellom dem blir lik null.

22 $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

blir en ortonormal basis.

23 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,[1,\,1,\,2]$ og $\dfrac{1}{\sqrt{30}}\,[-5,\,1,\,2]$

utgjør en ortonormal basis for W.

24 Vilkåret blir $c = 0$, $a + b = 0$ og $a \neq 0$.

25 $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\}$

26 $\text{proj}_W(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

27 a) Første og tredje likning i systemet er i strid med hverandre.

b) $x_1 = 1, \quad x_2 = -1$

Kapittel 7

1 $\lambda = 2, \quad \boldsymbol{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

2 $\lambda_1 = 0, \quad \boldsymbol{v}_1 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

$\lambda_2 = 5, \quad \boldsymbol{v}_2 = t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

3 $\lambda = 1, \quad \boldsymbol{v} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

4 $\lambda_1 = 1, \quad \boldsymbol{v}_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

$\lambda_2 = 3, \quad \boldsymbol{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

5 $\lambda_1 = 1, \quad \boldsymbol{v}_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

$\lambda_2 = 3, \quad \boldsymbol{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

6 $\lambda_1 = 1, \quad \boldsymbol{v}_1 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

$\lambda_2 = 3, \quad \boldsymbol{v}_2 = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

7 a) $\lambda_1 = 1, \quad \boldsymbol{v}_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

$\lambda_2 = 2, \quad \boldsymbol{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

$\lambda_3 = 3, \quad \boldsymbol{v}_3 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

b) $\lambda = 1, \quad \boldsymbol{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

8 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = (1-\lambda)(3-\lambda), \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3$

9 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = (\lambda-2)^2, \lambda_1 = 1$

10 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = -(\lambda-2)(\lambda^2-1)$,
$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1$

11 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = -(\lambda-2)^3, \lambda_1 = 2$

12 a) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{v}_1) = \lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = {\lambda_1}^2\boldsymbol{v}_1$

b) $\boldsymbol{v}_1$ er en egenvektor for $\boldsymbol{A}^k$ med egenverdien ${\lambda_1}^k$.

c) $\boldsymbol{M}$ har egenverdien ${\lambda_1}^2 + \lambda_1$.

13 a) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

eller

$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

14 $\lambda = 4$ er en egenverdi med tilsvarende egenvektor:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nei. For å være diagonaliserbar må $\boldsymbol{C}$ ha to lineært uavhengige egenvektorer.

15 De eneste egenvektorene er $t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

16 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|$ blir et tredjegradspolynom som har minst ett nullpunkt.

17 Dersom $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$ og λ er en egenverdi for $\boldsymbol{P}$ med egenvektoren $\boldsymbol{v}$, må $\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$, slik at $\lambda^2\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

18 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

19 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 80 \\ 112 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 68 \\ 124 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 65 \\ 127 \end{bmatrix}$

20 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 43 \\ 19 \end{bmatrix}$

21 $\boldsymbol{x}_k = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

22 $\boldsymbol{x}_k = 64\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 64\left(\frac{1}{4}\right)^k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

23 $\boldsymbol{x}_k = \frac{3}{4} \cdot 3^k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{5}{4}\right)(-1)^k\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Kapittel 8

1 a) $\boldsymbol{u}_1$ og $\boldsymbol{u}_2$ er to lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^2$.

b) $\boldsymbol{M}_{BS} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{M}_{SB} = (\boldsymbol{M}_{BS})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $[\boldsymbol{b}]_B = \boldsymbol{M}_{SB}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t_2 - t_1 \\ t_1 + t_2 \end{bmatrix}$

$[\boldsymbol{a}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2 a) $\boldsymbol{M}_{BC} = \boldsymbol{M}_{SC}\boldsymbol{M}_{BS} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{M}_{CB} = (\boldsymbol{M}_{BC})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{M}_{CB} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -13 & -36 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{BC} = \begin{bmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$

3 a) $\boldsymbol{M}_{BS} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{M}_{SB} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\boldsymbol{w}]_B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ gir

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi$$

c) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gir

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$$

Det gir så

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$$

Likningen blir da

$$(x')^2 - (y')^2 = 2$$

4 $[\boldsymbol{a}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

5 $[\boldsymbol{a}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

6 $\boldsymbol{M}_{CB} = \boldsymbol{M}_{C_1B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{M}_{BC} = (\boldsymbol{M}_{CB})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7 a) $[T]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 1 \quad \text{gir} \quad \boldsymbol{v}_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

$\lambda_2 = 2 \quad \text{gir} \quad \boldsymbol{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$

c) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

d) $\boldsymbol{M}_{B_2 B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

8 Velg for eksempel

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3$

Kapittel 9

1 $\boldsymbol{A}$ er ortogonal, $\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2 $\boldsymbol{A}$ er ortogonal, $\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^\top$.

3 $\boldsymbol{A}$ er ikke ortogonal, $\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4 $\boldsymbol{A}$ er ikke ortogonal, $\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

5 $\boldsymbol{A}$ er ortogonal, $\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^\top$.

6 $\boldsymbol{A}$ er ikke ortogonal, $\quad \boldsymbol{A}^{-1}$ har disse radene:

$$\boldsymbol{r}_1 = \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right], \quad \boldsymbol{r}_2 = \left[\frac{1}{14}, \frac{-2}{14}, \frac{3}{14}\right],$$
$$\boldsymbol{r}_3 = \left[\frac{-4}{21}, \frac{1}{21}, \frac{2}{21}\right]$$

7 Sett $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^\top$. Da er $\boldsymbol{M}$ invertibel og

$$\boldsymbol{M}^\top = \left(\boldsymbol{A}^\top\right)^\top = \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{M}^{-1}$$

8 Matrisene $\boldsymbol{M}_{BS}$ og $\boldsymbol{M}_{CS}$ blir ortogonale. Dermed er

$$\boldsymbol{M}_{BC} = \boldsymbol{M}_{SC}\boldsymbol{M}_{BS} = (\boldsymbol{M}_{CS})^{-1}\boldsymbol{M}_{BS}$$

ortogonal etter oppgave 7.

10 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^\top$ der

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

11 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^\top$ der

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^\top$ der

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

13 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^\top$ der

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

14 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^\top$ der

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

15 Gå ut fra at $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$. Da har vi

a)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^\top &= \left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^\top \\ &= \left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{P}^\top \\ &= \left(\boldsymbol{P}^\top\right)^{-1} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{P}^\top \\ &= \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{P}_1^{-1} \end{aligned}$$

der $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}^\top$.

b) Hvis $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$, gjelder

$$\boldsymbol{P}^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}^{-1}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

c) $\boldsymbol{B}$ blir invertibel fordi $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \neq 0$.
Av $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$ følger at

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$$

16 Hvis $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAP}^{-1}$ og $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{QBQ}^{-1}$, får vi

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{QPAP}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{RAR}^{-1}$$

der $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{QP}$.

17 Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ har egenverdien $\lambda_1 = 1$,

vektoren $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ har egenverdien $\lambda_2 = 2$.

Ettersom $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 + 3 + 5$, følger at $\lambda_3 = 3$.

18 Siden $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$, fins det en ortogonal matrise $\boldsymbol{Q}$ slik at $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QDQ}^{-1}$, der $\boldsymbol{D}$ er en diagonalmatrise. Det gir $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PQDQ}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$, det vil si at $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{DP}_1{}^{-1}$, der $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{PQ}$. Men

$$(\boldsymbol{P}_1)^\top = (\boldsymbol{PQ})^\top = \boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{P}^\top = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = (\boldsymbol{PQ})^{-1} = \boldsymbol{P}_1{}^{-1}$$

Kapittel 10

1 $4(x')^2 + 9(y')^2 = 1$, $\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2 $3(x')^2 - 2(y')^2 = 8$, $\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

3 $(x')^2 - (y')^2 = 1$, $\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

4 $5(x')^2 - (y')^2 = 4$, $\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

5 $-8(x')^2 + 2(y')^2 = 8$, $\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

6 $\boldsymbol{Ma} - \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} a_1 g_1(x_1) + a_2 g_2(x_1) - y_1 \\ a_1 g_1(x_2) + a_2 g_2(x_2) - y_2 \\ \vdots \\ a_1 g_1(x_n) + a_2 g_2(x_n) - y_n \end{bmatrix}$

7 $a_1 = 1{,}3, \quad a_2 = 1{,}1$

8 $a_1 = 2, \quad a_2 = 1$

9 $a_1 = \dfrac{87}{35}, \quad a_2 = -\dfrac{19}{10}, \quad a_3 = \dfrac{19}{14}$

10 Vi kan vise at $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}$ er invertibel dersom rang $\boldsymbol{M} = m$ (vi bruker da notasjonen i oppsummeringen foran setning 10–3):

Gå ut fra at $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{0}$. Da er $\boldsymbol{Mx}$ både i V og i $V^\perp$. At $\boldsymbol{Mx} \in V$ (søylerommet til $\boldsymbol{M}$), gjelder alltid, og foran setning 10–3 viste vi at $V^\perp = \text{Null}\,(\boldsymbol{M}^\top)$. Men da må $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{0}$. Siden rang $\boldsymbol{M} = m$, har likningen $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{0}$ bare den ene løsningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ i $\mathbb{R}^m$. Altså har $m \times m$-matrisen $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}$ følgende egenskap:

Dersom $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{0}$, er $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
Det vil si at $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}$ er invertibel.

11 a) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

13 $\boldsymbol{X}(t) = \dfrac{3}{4} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{4} e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

14 $\boldsymbol{X}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

15 $\boldsymbol{X}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

16 $\boldsymbol{X}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Kapittel 11

1 $A = B = D \neq C$

2
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$(A \cup B) \setminus C = \{2, 4, 5\}$$
$$A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\}$$
$$A \cap B = \{2, 3\}$$
$$A \cap C = \{1, 3\}$$
$$\overline{A} = \{4, 5, 6, 7\}$$
$$\overline{B} = \{1, 6, 7\}$$

3 Tips: Vis at $X \setminus \overline{A} = A$, og at $\overline{\overline{A}} = X \setminus \overline{A}$.

4 Vi skal vise at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1 Gå ut fra at $x \in \overline{A \cup B}$. Da er $x \notin A$ og $x \notin B$. Altså er $x \in \overline{A}$ og $x \in \overline{B}$, slik at $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Dermed har vi vist at $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

2 Gå så ut fra at $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Da er $x \notin A$ og $x \notin B$. Altså er $x \notin A \cup B$. Det vil si at $x \in \overline{A \cup B}$. Dermed har vi vist at $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Alt i alt har vi nå at $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
(Se også oppgave 9.)

5 Vi bruker resultatet fra oppgave 4 med $\overline{A}$ i stedet for A og $\overline{B}$ i stedet for B. Det gir
$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$$
Vi tar nå komplimentene av disse mengdene:
$$\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A \cap B}$$
Det vil si at $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

6
$$(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$$
$$A \cup (B \cap C) = A$$
$$\overline{C} \cup \overline{D} = \overline{C \cap D} = \overline{\varnothing} = X$$
(Her innledet vi med å bruke De Morgans lov, se oppgave 5.)
$$\overline{C \cap D} = X$$
$$(A \cup B) \setminus C = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$
$$(B \setminus C) \setminus D = \{8\}$$
$$B \setminus (C \setminus D) = \{2, 4, 8\}$$
$$\overline{B \setminus C} = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$$

7 $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$
$A = \{1, 3, 4, 5\}$

8 Vilkåret er at $C \supseteq A \cup B$.

10 Tips: Start med å bruke De Morgans første lov (se oppgave 4) på $\overline{A \cup B \cup C}$. Bruk De Morgans andre lov (se oppgave 5) på $\overline{A \cap B \cap C}$.

11 a) 55 deltakere i begge valgene

b) 95 deltakere i minst ett valg

c) 40 personer deltok i nøyaktig ett valg

12 a) Ettersom $A \cap B = \varnothing$, er $|A \cup B| = 90$.
Det gir $|\overline{A \cup B}| = 10$.

b)
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| \\ &\quad - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 20 + 70 + 40 - 0 - 4 - 30 + 0 \\ &= 96 \end{aligned}$$
Videre er
$$|(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$
Siden $|A \cup B| = 90$, blir da
$$|(A \cup B) \cap C| = 90 + 30 - 96 = 24$$
Siden $C = \big(C \cap (A \cup B)\big) \cup \big(C \cap \overline{A \cup B}\big)$, får vi
$$\left| C \cap \overline{A \cup B} \right| = 40 - 24 = 16$$

14 a) alle personer som er lys blonde, eller som er keivhendte menn (eller begge deler)

b) alle menn som er lys blonde eller keivhendte (eller begge deler)

c) alle lys blonde personer som er høyrehendte

d) alle lys blonde personer som *ikke* er keivhendte menn

e) alle høyrehendte, lys blonde menn

f) alle keivhendte kvinner som *ikke* er lys blonde

15 La

$$M_1 = \{\text{alle som leser } A\}$$
$$M_2 = \{\text{alle som leser } B\}$$
$$M_3 = \{\text{alle som leser } C\}$$

Vi har

$$\begin{aligned}|M_1 \cup M_2 \cup M_3| &= |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| \\ &\quad - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| \\ &\quad + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| \\ &= 70 + 54 + 32 - 18 - 5 - 20 + 3 \\ &= 116\end{aligned}$$

a) Antallet studenter som ikke leste noen avis, blir dermed $250 - 116 = 134$.

b) Vi skal finne $|M_1 \cup M_3 \setminus M_2|$.
Vi starter med $|(M_1 \cup M_3) \cap M_2|$ og har

(1) $$|(M_1 \cup M_3) \cup M_2| + |(M_1 \cup M_3) \cap M_2| = |M_1 \cup M_3| + |M_2|$$

(2) $$|M_1 \cup M_3| + |M_1 \cap M_3| = |M_1| + |M_3|$$

Fra likning 2 får vi

$$|M_1 \cup M_3| = 70 + 32 - 5 = 97$$

som vi setter inn i likning 1. Det gir

$$|(M_1 \cup M_3) \cap M_2| = 97 + 54 - 116 = 35$$

Dermed har vi

$$(M_1 \cup M_3) \setminus M_2 = 97 - 35 = 62$$

c) Vi skal finne $|M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)|$.
For det første er

$$|(M_1 \cup M_2) \cap M_3| + |(M_1 \cup M_2) \cup M_3| = |M_1 \cup M_2| + |M_3|$$

Det gir

$$|(M_1 \cup M_2) \cap M_3| = |M_1 \cup M_2| + 32 - 116$$

Videre er

$$\begin{aligned}|M_1 \cup M_2| &= |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2| \\ &= 70 + 54 - 18 \\ &= 106\end{aligned}$$

som gir

$$|(M_1 \cup M_2) \cap M_3| = 106 + 32 - 116 = 22$$

Vi får

$$|M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)| = 32 - 22 = 10$$

d) Vi skal finne $\big|M_3 \cap \big((M_2 \setminus M_1) \cup (M_1 \setminus M_2)\big)\big|$.
Her er

$$|M_3 \cap (M_1 \cup M_2)| = 22 \quad \text{og} \quad |M_3 \cap (M_1 \cap M_2)| = 3$$

Det søkte antallet blir derfor $22 - 3 = 19$.

Kapittel 12

1 a) $q \wedge p$ c) $r \Rightarrow \neg p$ e) $p \Rightarrow q$
b) $q \Rightarrow p$ d) $p \vee r$

2 a) Det regner i dag *eller* Per spiller fotball.
b) Det regner i dag *og* Per spiller fotball.
c) Det regner i dag *og* Per spiller ikke fotball.
d) Det regner i dag *og* Per er heime eller spiller fotball.
e) Per er heime *eller* så regner det i dag, og Per spiller fotball.
f) Per er heime *eller* så spiller Per fotball, og det regner ikke.

3 a)

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
S	S	U	S	U	S	S
S	U	U	U	S	U	S
U	S	S	S	U	U	S
U	U	S	S	S	U	U

Svaret på oppgave a står i fjerde kolonne.
De tre siste kolonnene får vi bruk for i e og f.

b) Fra a får vi denne tabellen:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
S	S	U	U
S	U	S	S
U	S	U	U
U	U	S	U

c) Fra a får vi denne tabellen:

p	q	$(\neg p) \vee q$	$p \wedge \big((\neg p) \vee q\big)$
S	S	S	S
S	U	U	U
U	S	S	U
U	U	S	S

d) Tabell for $q \vee \big((\neg q) \wedge p\big)$:

p	q	$\neg q$	$(\neg q) \wedge p$	$q \vee \big((\neg q) \wedge p\big)$
S	S	U	U	S
S	U	S	S	S
U	S	U	U	S
U	U	S	U	U

e) Tabell for $(\neg p) \wedge \big(\neg(p \wedge q)\big)$:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \wedge \big(\neg(p \wedge q)\big)$
S	S	U	S	U	U
S	U	U	U	S	U
U	S	S	U	S	S
U	U	S	U	S	S

Den tredje og fjerde kolonnen fant vi i a.

f) Tabell for $\neg\big(p \wedge (p \vee q)\big)$:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$\neg\big(p \wedge (p \vee q)\big)$
S	S	S	S	U
S	U	S	S	U
U	S	S	U	S
U	U	U	U	S

Den tredje kolonnen fant vi i a.

4

p	q	$p \oplus q$
S	S	U
S	U	S
U	S	S
U	U	U

5

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg p$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
S	S	U	U	U	U	U
S	U	U	S	S	U	S
U	S	S	U	U	S	S
U	U	S	S	U	U	U

Vi ser at $p \oplus q$ og $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ har samme sannhetsverditabell. Det vil si at de er likeverdige.

6 a)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
S	U	S
S	U	S
U	S	S
U	S	S

b) Utsagnet $p \wedge (q \vee \neg r)$:

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge (q \vee \neg r)$
S	S	S	U	S	S
S	U	S	U	U	U
U	S	S	U	S	U
U	U	S	U	U	U
S	S	U	S	S	S
S	U	U	S	S	S
U	S	U	S	S	U
U	U	U	S	S	U

c) Utsagnet $p \vee \big(p \wedge (q \vee \neg r)\big)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \vee \big(p \wedge (q \vee r)\big)$
S	S	S	S	S	S
S	U	S	S	S	S
U	S	S	S	U	U
U	U	S	S	U	U
S	S	U	S	S	S
S	U	U	U	U	S
U	S	U	S	U	U
U	U	U	U	U	U

d) Vi tar kolonnene for p og $q \vee r$ fra oppgave c:

p	$q \vee r$	$p \Rightarrow q \vee r$
S	S	S
S	S	S
U	S	S
U	S	S
S	S	S
S	U	U
U	S	S
U	U	S

e) Oppgaven er tvetydig formulert, for det mangler en parentes. Vi finner sannhetsverditabellene for både $p \Rightarrow (q \vee p \Rightarrow \neg q)$ og $(p \Rightarrow q \vee p) \Rightarrow \neg q$:

p	q	$\neg q$	$q \vee p$	$p \Rightarrow q \vee p$	$q \vee p \Rightarrow \neg q$	$p \Rightarrow (q \vee p \Rightarrow \neg q)$	$(p \Rightarrow q \vee p) \Rightarrow \neg q$
S	S	U	S	S	U	U	U
S	U	S	S	S	S	S	S
U	S	U	S	S	U	S	S
U	U	S	U	S	S	S	S

Av de to siste kolonnene ser vi at de to utsagnene som står øverst i disse kolonnene, er logisk likeverdige. Derfor var det ikke galt å sløyfe parentesen i oppgaven.

7

p	$\neg p$	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
S	U	U	U	U
S	U	S	S	S
U	S	U	S	S
U	S	S	S	S

Tabellene for $p \Rightarrow q$ og $\neg p \vee q$ er like. Det vil si at de to utsagnene er logisk likeverdige (ekvivalente).

8 Tabell for $\big((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)\big) \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow r)$:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$\big((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)\big) \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	U	S	U	S	U	S	S
U	S	S	S	S	S	S	S
U	U	S	S	S	S	S	S
S	S	U	S	U	U	U	S
S	U	U	U	S	U	U	S
U	S	U	S	U	U	S	S
U	U	U	S	S	S	S	S

Sannhetsverditabellen for $\big((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)\big) \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow r)$ har S på alle plassene.
Utsagnet $\big((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)\big) \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow r)$ sier: Dersom p impliserer q og q impliserer r, vil p implisere r. (Det er et resultat som vi ofte bruker i matematiske bevis og i andre logiske slutningskjeder.)

9 I denne oppgaven er P, Q og R «sannhetsmengdene» til utsagnene p, q og r i oppgavene 5 og 6.

Sannhetsmengden til utsagnet i siste kolonne i oppgave 5 er $(P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$.

Fra oppgave 6 får vi:

a) Sannhetsmengden er hele X.

b) Sannhetsmengden er
$$P \cup \big(P \cap (Q \cup R)\big)$$
som er lik P fordi $P \cap (Q \cup R) \subset P$.

c) Utsagnet $p \Rightarrow q \lor r$ svarer til påstanden $P \subseteq Q \cup R$.

MERKNAD: Dersom det fins et element $x \in P$ slik at $x \notin Q \cup R$, har vi ikke noe mengdeteoretisk utsagn som svarer til implikasjonen $p \Rightarrow q \lor r$. Det har som konsekvens at vi ikke kan bruke venn‖-diagrammer til å illustrere logiske implikasjoner.

10 Ettersom $1 = 1^2$, gjelder påstanden $p\,(1)$.
Gå ut fra at $p\,(k)$ gjelder:
$$1 + 3 + \ldots + (2k-1) = k^2$$
Da er
$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2k-1) + \big(2\,(k+1) - 1\big) &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$
Altså gjelder $p\,(k+1)$. Vi har nå vist at
$$p\,(k) \Rightarrow p\,(k+1)$$
og dermed er hele induksjonsbeviset fullført.

11 Ettersom $\dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}$, er $p\,(1)$ sann.
Hvis $p\,(k)$ er sann, har vi
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
Vi adderer $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}$ på hver side av likhetstegnet og får
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{aligned}$$
som viser at $p\,(k+1)$ gjelder.

12 Ettersom $\dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{1+1}$, er $p\,(1)$ sann.
Gå ut fra at $p\,(k)$ gjelder:
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$
Da er
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\,(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$
som gir $p\,(k+1)$.

13 Ettersom $1 = \left(\frac{1\,(1+1)}{2}\right)^3$, gjelder $p\,(1)$.

Gå ut fra at $p\,(k)$ gjelder, det vil si

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\ &= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

og det følger at $p\,(k+1)$ gjelder.

14 Ettersom $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, er $p\,(1)$ sann.

Gå ut fra at $p\,(k)$ gjelder:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k\,(k+1)(2k+1)}{6}$$

Det gir

$$\begin{aligned}&1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \\ &\qquad = \frac{k\,(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &\qquad = \frac{(k+1)}{6}\,\big(k\,(2k+1) + 6k + 6\big)\end{aligned}$$

Siden

$$\begin{aligned}(k+2)(2k+3) &= 2k^2 + 7k + 6 \\ &= k\,(2k+1) + 6k + 6\end{aligned}$$

følger nå $p\,(k+1)$.

15 Vi lar $p\,(n)$ være utsagnet $2^n > n^2$.
Siden $2^5 = 32$ og $5^2 = 25$, gjelder $p\,(5)$.
Gå nå ut fra at $k \geq 5$, og at $2^k > k^2$.
Ettersom

$$\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \leq \frac{6}{5}$$

har vi

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \leq \frac{36}{25} < 2$$

Men da er

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k^2 \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = (k+1)^2$$

Altså gjelder utsagnet $p\,(k+1)$.

16 En velkjent setning i geometrien sier at summen av vinklene i en trekant er lik 180°. Dermed gjelder $p\,(3)$. Gå nå ut fra at $p\,(k)$ er sann, og at $k \geq 3$. Tegn en mangekant med k hjørner, $P_1, P_2, \ldots, P_k$, der punktene er listet opp i rekkefølge *mot* urviserens gang. Sett av et nytt punkt P_{k+1} *utenfor* sida $P_1 P_k$, og trekk linjestykkene $P_1 P_{k+1}$ og $P_k P_{k+1}$. Nå har du en mangekant med $k+1$ hjørner. Den nye mangekanten er unionen av mangekanten med hjørner i $P_1, \ldots, P_k$ og trekanten med hjørnene P_k, P_{k+1} og P_1. Den totale vinkelsummen for mangekanten med hjørnene $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$ blir derfor

$$(k-2) \cdot 180^\circ + 180^\circ = \big((k+1) - 2\big) \cdot 180^\circ$$

17 For $n = 1$ har tallet $9n$ desimalutviklingen 9, som er delelig med 9. Altså gjelder påstanden for $n = 1$. Gå nå ut fra at summen av sifrene i $9k$ er delelig med 9. Dersom $9k$ har sifrene $a_1, a_2, \ldots, a_l$, der $0 \leq a_i \leq 9$ $(1 \leq i \leq l)$, har vi

$$9k = a_1 + a_2 \cdot 10 + \ldots + a_l \cdot 10^{l-1}$$

Da blir

$$\begin{aligned}9\,(k+1) &= 9 + a_1 + a_2 \cdot 10 + a_3 \cdot 10^2 + \ldots + a_l \cdot 10^l \\ &= a_1{}' + a_2{}' \cdot 10 + \ldots + a_l{}' \cdot 10^{l-1} + a'_{l+1} \cdot 10^l\end{aligned}$$

der $a_1{}', a_2{}', \ldots, a_l{}', a'_{l+1}$ er desimalutviklingen til $9\,(k+1)$.

Vi må drøfte ulike muligheter:
Først tenker vi oss at $a_1 = 0$. Da har vi

$$a_1{}' = 9, \quad a_j{}' = a_j, \quad 2 \leq j \leq l, \quad a'_{l+1} = 0$$

Dermed blir

$$a_1{}' + a_2{}' + \ldots + a_l{}' = 9 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_l)$$

delelig med 9 (fordi $a_1 + \ldots + a_l$ er delelig med 9). Når derimot $a_1 \geq 1$, blir $a_1{}' = a_1 - 1$. La a_r være valgt der $r \geq 2$ er minst mulig og samtidig oppfyller $a_r < 9$. Da blir

$$a_r{}' = a_r + 1 \quad \text{og} \quad a_s{}' = a_s - 9 = 0$$

for $1 < s < r$. Dessuten får vi $a_t{}' = a_t$ når $t > r$. Men dermed blir

$$a_1{}' + a_2{}' + \ldots + a_l{}' = a_1 + a_2 + \ldots + a_l - 9\,(r-1)$$

delelig med 9.

Dersom det ikke fins noen slik r, må

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_l = 9$$

Da har vi

$$a_1{}' = 8, \quad a_2{}' = a_3{}' = \ldots = a_l{}' = 0, \quad a'_{l+1} = 1$$

og igjen gjelder utsagnet $p\,(k+1)$.

18 Det er opplagt at

$$K_1 = 2 = 1 + \frac{1\,(1+1)}{2}$$

fordi *en* linje L_1 deler planet i to. Dersom vi så trekker en linje L_2 som skjærer L_1, vil L_1 og L_2 til sammen dele planet i

$$4 = 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} \text{ deler}$$

Vi merker oss at $K_2 = K_1 + 2$. Tenk deg at vi har trukket $n-1$ linjer, $L_1, \ldots, L_{n-1}$, som til sammen avgrenser K_{n-1} områder, og at

$$K_{n-1} = K_{n-2} + (n-1)$$

Vi velger nå linja L_n slik at den skjærer alle linjene $L_1, \ldots, L_{n-1}$, i $n-1$ *ulike* punkter. (Vi lar L_n ha en retning som er forskjellig fra retningene til $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$. Dersom det trengs, gjør vi en parallellforskyvning, slik at vi unngår skjæringspunkter som er felles for to av linjene fra $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$.)

Hver gang L krysser en av linjene $L_1, \ldots, L_{n-1}$, passerer den fra et av områdene dannet av $L_1, \ldots, L_{n-1}$ og over i et annet. Siden L krysser $n-1$ linjer, får vi n «nye» områder. Dermed følger at

$$K_n = K_{n-1} + n$$

Ved induksjon følger så at

$$K_n = 1 + \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Vi har vist formelen for $n = 1$ og $n = 2$.
Tenk deg nå at

$$K_k = 1 + \frac{k\,(k+1)}{2}$$

Da har vi

$$\begin{aligned} K_{k+1} = K_k + (k+1) &= 1 + (k+1) + \frac{k\,(k+1)}{2} \\ &= 1 + (k+1)\left(1 + \frac{k}{2}\right) \\ &= 1 + (k+1) \cdot \frac{k+2}{2} \\ &= 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

som vi skulle vise.

19 Ettersom $1 \le 2 - 1$, er $p\,(1)$ sann.
Gå ut fra at $p\,(k)$ gjelder:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{k}$$

Når vi adderer $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ på begge sider av likhetstegnet, får vi

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} &\le 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &\le 2 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

der vi har brukt

$$\frac{1}{k+1} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k\,(k+1)} < 0$$

for å passere det siste ulikhetstegnet. Altså følger $p\,(k+1)$ av $p\,(k)$, og vi har fullført beviset.

20 Ulikheten gjelder for $n = 1$, ettersom

$$a + b \ge \frac{a+b}{2}$$

Gå ut fra at $p\,(k)$ gjelder, der $p\,(k)$ er utsagnet

$$a^k + b^k \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$$

Vi kan regne med at $b \ge a$. Vi får

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a^k + b^k\right) \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$$

Det vil si

$$\frac{1}{2}\left(a^{k+1} + ab^k + ba^k + b^{k+1}\right) \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$$

Vi er i mål dersom

$$ab^k + ba^k \le a^{k+1} + b^{k+1}$$

det vil si

$$(b-a)\,a^k \le (b-a)\,b^k$$

Men den siste ulikheten gjelder fordi $b \ge a$, og dermed har vi fullført induksjonsbeviset.

MERKNAD: Vilkåret $b \ge 2$ i oppgaven kan vi svekke til $b \ge 0$.

Kapittel 13

3 a) 18
b) 840
c) $n+1$
d) $(n+1)(n+2)(n+3)$
e) $2n+1$
f) $(2n+2)(2n+3)$

4 $9{,}0 \cdot 10^8$ lysår

5

n	$n!$	Stirlings formel	Modifisert metode
1	1	0,922 137	0,998 9818
5	120	118,0192	119,9862
10	$3{,}628\ 80 \cdot 10^{6}$	$3{,}598\ 70 \cdot 10^{6}$	$3{,}628\ 69 \cdot 10^{6}$
25	$1{,}551\ 12 \cdot 10^{25}$	$1{,}545\ 96 \cdot 10^{25}$	$1{,}551\ 11 \cdot 10^{25}$
50	$3{,}041\ 41 \cdot 10^{64}$	$3{,}036\ 35 \cdot 10^{64}$	$3{,}041\ 41 \cdot 10^{64}$
100	$9{,}332\ 62 \cdot 10^{157}$	$9{,}324\ 85 \cdot 10^{157}$	$9{,}332\ 62 \cdot 10^{157}$
500	$1{,}220\ 14 \cdot 10^{1134}$	$1{,}219\ 93 \cdot 10^{1134}$	$1{,}220\ 14 \cdot 10^{1134}$

Stirlings formel:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Modifisert metode:

$$n! \approx \left(1 + \frac{1}{12n}\right) n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

6 4 598 126 måter

7 180 tall dersom vi *ikke* regner tall som begynner med null, som tresifret

8 90 tall dersom vi *ikke* regner tall som begynner med null, som tresifret

9 256 ord

10 a) fire måter (dvs. forskjellige grupper)
b) $\binom{n}{k}$
c) $\binom{n}{n-k}$
d) ja, fordi begge binomialkoeffisientene er lik

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Kapittel 14

2 a) $x_n = C_1\,(-1)^n + n\,C_2\,(-1)^n$
b) $x_n = C_1\,(-2)^n + n\,C_2\,(-2)^n$
c) $x_n = C_1\,2^n + C_2\,3^n$
d) $x_n = C_1\,(-2)^n + C_2\,3^n$

3

a) $x_n = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

b) $x_n = 20 \cdot 2^n - 12 \cdot 3^n$

c) $x_n = -\frac{7}{6} \cdot (-1)^n + \frac{1}{6} \cdot 5^n$

d) $x_n = \frac{1}{3} \cdot (-2)^n + \frac{5}{3}$

4 Tallfølgen x_n må oppfylle differenslikningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

som har den allmenne løsningen

$$x_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Siden $x_0 = 1$ og $x_1 = 1$, får vi

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{og} \quad C_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Det gir

$$x_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ettersom

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

får vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \to \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

5 Følgene må være løsninger til differenslikningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$$

og må derfor ha formen

$$x_n = C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

der C_1 og C_2 er to fritt valgte konstanter.

6 a) $x_n = C_1\, 2^n + C_2\,(-7)^n + \frac{1}{10}\cdot 3^n$

b) $x_n = C_1 + C_2\,(-7)^n - \frac{5n}{64} + \frac{n^2}{16}$

c) $x_n = C_1\, 3^n + C_2\, n3^n + \frac{n^2}{18}\cdot 3^n$

d) $x_n = C_1\, 3^n \cos(n\theta) + C_2\, 3^n \sin(n\theta) + \frac{1}{3}$,

der $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ og $\cos\theta = -\frac{1}{3}$.

e)
$$x_n = C_1 \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{n^3}{3} - n^2 + \frac{n}{3} + \frac{1}{3}$$

7 a)
$$x_{n+1} = x_n + n^2 + 2n + 1$$
$$x_{n+2} = x_{n+1} + n^2 + 4n + 4$$

Når vi trekker den første likningen fra den andre, får vi
$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2n + 3$$

b) $y_n = An^3 + Bn^2$ er en løsning dersom $A = \frac{1}{3}$ og $B = \frac{1}{2}$. Det gir
$$x_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Tillegg

1 a) $\frac{3}{20} - \frac{i}{20}$ c) -1 e) $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

b) 5 d) i f) -1

(Tips til oppgave c: Husk setning T–3.)

2 z svarer til punktet $(1,\ 1)$

$\bar{z}$ svarer til punktet $(1,\ -1)$

$\frac{1}{z}$ svarer til punktet $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$-z$ svarer til punktet $(-1,\ -1)$

3 a) $z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_2 = e^{\frac{i5\pi}{6}}$, $e^{\frac{i9\pi}{6}}$

b) $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i7\pi}{6}} = -z_1$

c) $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_2 = 2e^{\frac{i7\pi}{6}}$, $z_3 = 2e^{\frac{i11\pi}{6}}$

4 $z = 1 \pm i\sqrt{3}$

5 a) $|z - i| < 1$ gir alle punkter innenfor sirkelen som har radius lik 1 og sentrum i punktet $(0,\ 1)$.

b) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$ gir alle punkter på y-aksen.

c) $|z| < 1$ og $\operatorname{Re}(z) > 0$ gir alle punkter som ligger til høyre for y-aksen og inni enhetssirkelen omkring origo. (*Enhetssirkelen* om origo er den sirkelen som har radius lik 1 og sentrum i origo.)

d) punktet $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

6 Gå ut fra at $p(z_0) = 0$, det vil si
$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 {z_0}^2 + \ldots + a_N {z_0}^N = 0$$
Det gir
$$a_0 + a_1 \overline{z_0} + a_2 \overline{z_0}^2 + \ldots + a_N \overline{z_0}^N = 0$$
som vil si at $p(\overline{z_0}) = 0$.